

Исследование группы цифровых двойников предприятий

А. Н. Сытов, email: an-sytov@yandex.ru¹

А. В. Вахранев, email: anton22255@yandex.ru¹

Ф. И. Ерешко, email: fereshko@yandex.ru¹

¹ ФИЦ ИУ РАН

***Аннотация.** Рассматривается группа цифрового двойника предприятий-динамических базовых моделей-описывающей процессы развития производства, динамику материальных (продукция, производственные фонды) и финансовых потоков (инвестиции, активы, обязательства, собственный капитал), а также допускающей учёт технологических связей, централизации управления и экономических целей производства. Приводится постановка оптимизационной задачи для одного предприятия, когда предприятие выступает как самостоятельный экономический агент. Для группы предприятий формируется теоретико-игровая модель в варианте Коалиции и при наличии управляющего Центра, располагающего первичными ресурсами для производства и административными рычагами*

***Ключевые слова:** цифровой двойник, динамика, материальные и финансовые потоки, оптимизация, игра Г1.*

Введение

В условиях широкой цифровизации в стране технологий и организационных структур принципиальное значение приобретает проблема построения Цифровых Платформ, как совокупности методических установок, математических моделей динамики процессов производства, систем управления, баз необходимых данных, технологических связей с учётом широкого спектра целевых установок в экономике и наличии неопределённых факторов.

Очевидно, что построение Цифровых платформ начинается с разработки цифровых двойников предприятий- их базовых моделей.

В работе рассматриваются проблемы описания группы цифровых двойников, приводятся формулировки задач управления, анализа методов решения оптимизационных и теоретико-игровых задач, возможности проведения имитационных экспериментов.

Работа продолжает работы [11-12]

1. Базовая модель отдельного предприятия

Описание приводится в работе авторов [1-3, 12]. Учитывая опыт построения экономико-математических моделей и принимая во внимание финансовые ограничения [1-3], описание условного

предприятия задаётся в виде Базовой модели, включающей в своем составе следующие основные блоки.

2. Материальный баланс

Блок «Производство»: следующие переменные относятся к шагу t : X_k^p – запасы продуктов на начало шага t (вектор соответствующей размерности), z_k^p – выпуск продуктов; $y_k^{p,\varphi}$ – количество продуктов, идущих на создание производственных фондов (фондообразующие продукты); $y_k^{p,p}$ – количество продуктов идущих непосредственно на производство (сырьевые продукты); $x_k^{p,+}$ – количество продуктов, поступающих на предприятие; $x_k^{p,-}$ – количество продуктов, уходящих с предприятия. Тогда динамика количества продуктов предприятия описывается следующим конечно-разностным уравнением:

$$\begin{aligned} X_k^p(t+1) &= X_k^p(t) + x_k^{p,+}(t) + z_k^p(t) - \\ &- x_k^{p,-}(t) - y_k^{p,p}(t) - y_k^{p,\varphi}(t), X_k^p(1) = X_k^{p,0} \end{aligned} \quad (1)$$

Блок «Производственные фонды»: $X_k^\varphi(t)$ – количество производственных фондов на начало шага t (вектор соответствующей размерности), $z_k^\varphi(t)$ – производственные фонды, созданные на шаге t . Динамика количества производственных фондов:

$$X_k^\varphi(t+1) = X_k^\varphi(t) + z_k^\varphi(t), X_k^\varphi(1) = X_k^{\varphi,0} \quad (2)$$

Блок «Труд»: $X_k^l(t)$ численность сотрудников различных специальностей на начало шага t (вектор размерности); $x_k^l(t)$ – изменение численности персонала предприятия на шаге t .

$$X_k^l(t+1) = X_k^l(t) + x_k^l(t) \quad (3)$$

Пусть u_k^p – вектор интенсивностей процессов производства, а u_k^φ – вектор интенсивностей процессов создания фондов. Запишем линейные соотношения, описывающие выпуск продукции и создание производственных фондов:

$$z_k^p(t) = A_k^p(t) \cdot u_k^p(t), B_k^p(t) \cdot u_k^p(t) \leq q_k^p(t)$$

$$z_k^\varphi(t) = A_k^\varphi(t) \cdot u_k^\varphi(t), B_k^\varphi(t) \cdot u_k^\varphi(t) \leq q_k^\varphi(t)$$

$$q_k^p(t) = (y_k^{p,p}(t), X_k^l(t), X_k^\varphi(t)), q_k^\varphi(t) = (y_k^{p,\varphi}(t), X_k^l(t), X_k^\varphi(t))$$

Здесь A_k^p , A_k^φ – матрицы удельных норм выпуска продукции и создания фондов; B_k^p , B_k^φ – матрицы удельных затрат выпуска продукции и создания фондов. Также мы ввели обозначения $q_k^p(t)$ и $q_k^\varphi(t)$ для векторов ресурсов, необходимых соответственно для производства продукции и создания фондов на шаге t .

Замечание о производственных функциях. Выше записаны соотношения в соответствии с производственной функцией Леонтьевского типа.

Предусматривается возможность использования в модели других видов производственных функций:

$$F_i(t, q^p(t)) = a_i \cdot \left(\sum_{i \in I^p} \alpha_i \cdot (y_i^{p,p}(t))^{\rho} + \sum_{r \in R^p} \alpha_r \cdot (X_r^l(t))^{\rho} + \sum_{j \in J^p} \alpha_j \cdot (X_j^f(t))^{\rho} \right)^{\beta/\rho} \quad (4)$$

CES функции.

$$F_i(t, q^p(t)) = a_i \cdot \prod_{i \in I^p} (y_i^{p,p}(t))^{\alpha_i} \prod_{r \in R^p} (X_r^l(t))^{\alpha_r} \prod_{j \in J^p} (X_j^f(t))^{\alpha_j} \quad (5)$$

функции Кобба-Дугласа,

$$F_i(t, q^p(t)) = \min \left(\min_{i \in I^p} \alpha_i y_i^{p,p}(t), \min_{r \in R^p} \alpha_r X_r^l(t), \min_{j \in J^p} \alpha_j X_j^f(t) \right) \quad (6)$$

запись соответствует модели Леонтьева В. В.

3. Финансовый баланс

Переменные относятся к началу шага t :

M_k – касса предприятия; S_k^p – товарные запасы; S_k^φ – основные фонды; A_k – активы предприятия; L_k – обязательства; E_k – собственный капитал;

$$M_k(t+1) = M_k(t) + Q_k^{p,-}(t) + H_k^c(t) - Q_k^{p,+}(t) - Q_k^{p,f}(t) - Q_k^l(t) - (1 + \gamma_k(t-1)) \cdot H_k^c(t-1), M_k(1) = M_k^0 \quad (7)$$

$$S_k^p(t+1) = S_k^p(t) + U_k^{p,+}(t) + U_k^{p,z}(t) - U_k^{p,-}(t) - U_k^{p,p}(t) - U_k^{p,\varphi}(t), S_k^p(1) = S_k^{p,0} \quad (8)$$

$$S_k^\varphi(t+1) = S_k^\varphi(t) + U_k^{\varphi,z}(t) - U_k^{\varphi,-}(t), S_k^\varphi(1) = S_k^{\varphi,0} \quad (9)$$

$$A_k(t+1) = A_k(t) + M_k(t+1) - M_k(t) + S_k^p(t+1) - S_k^p(t) + S_k^o(t+1) - S_k^o(t), A_k(1) = A_k^0 \quad (10)$$

$$L_k(t+1) = L_k(t) + H_k^c(t) - H_k^c(t-1), L_k(1) = L_k^0 \quad (11)$$

$$E_k(t+1) = E_k(t) + Q_k^{p,-}(t) + U_k^{p,+}(t) + U_k^{p,z}(t) + U_k^{o,z}(t) - Q_k^{p,+}(t) - U_k^{p,p}(t) - U_k^{p,-}(t) - U_k^{p,o}(t) - Q_k^l(t) - \gamma_k(t-1) \cdot H_k^c(t-1) - U_k^{o,-}(t), E_k(1) = E_k^0, \quad (12)$$

где

– $Q_k^{p,-}$ – поступления денежных средств в качестве оплаты за продукты, уходящие с предприятия;

– $Q_k^{p,+}$ – оплата приходящих на предприятие продуктов;

– Q_k^l – оплата труда сотрудников предприятия;

– $U_k^{p,+}$ – балансовая стоимость продуктов, приходящих на предприятие;

– $U_k^{p,z}$ – балансовая стоимость произведенных продуктов;

– $U_k^{p,-}$ – балансовая стоимость продуктов, уходящих с предприятия;

– $U_k^{p,p}$ – балансовая стоимость продуктов, идущих на производство;

– $U_k^{p,o}$ – балансовая стоимость продуктов, идущих на создание производственных фондов;

– $U_k^{o,-}$ – амортизация производственных фондов,

– $H_k^c(t)$ – заимствования предприятия по ставке $\gamma_k(t)$.

4. Операции с финансовыми инструментами

Обозначим через D список доступных для вложений инструментов. Рассмотрим ситуацию, при которой предприятие вкладывает одну единицу денежных средств на депозит вида $\rho \in D$ в конце шага τ . Данное вложение осуществляется на срок n_ρ^d . В конце шага t на интервале от $\tau+1$ до $\tau+n_\rho^d$ ему возвращаются денежные

средства в размере $h_{\tau,\rho}^d(t)$, а на оставшуюся сумму начисляются проценты по ставке $\zeta_{\tau,\rho}^d$.

Пусть $H_{\tau,\rho}^d$ – размер вложений предприятия в конце шага τ на депозит вида ρ , а $G_{\tau,\rho}^d(t)$ – их сумма вместе с начисленными процентами на начало шага t . Изменение этой переменной определяется следующими соотношениями и условиями:

$$S_{\tau,\rho}^d(t+1) = S_{\tau,\rho}^d(t) + g_{\tau,\rho}^d(t) - V_{\tau,\rho}^d(t), \quad t = \tau + 1, \dots, \tau + n_{\rho}^d;$$

$$S_{\tau,\rho}^d(t) = H_{\tau,\rho}^d, \quad t = \tau + 1; \quad S_{\tau,\rho}^d(t) = 0, \quad t = \tau + n_{\rho}^d + 1.$$

Здесь $g_{\tau,\rho}^d(t)$ – начисленные проценты в конце шага t , причем

$$g_{\tau,\rho}^d(t) = \zeta_{\tau,\rho}^d \cdot S_{\tau,\rho}^d(t), \quad t = \tau + 1, \dots, \tau + n_{\rho}^d.$$

Поступления с депозита обозначаются через $V_{\tau,\rho}^d(t)$ и записываются как

$$V_{\tau,\rho}^d(t) = h_{\tau,\rho}^d(t) \cdot H_{\tau,\rho}^d, \quad t = \tau + 1, \dots, \tau + n_{\rho}^d.$$

С учетом введенных обозначений условие окончания вложения будет иметь вид:

$$\sum_{t'=\tau+1}^{\tau+n_{\rho}^d} (1 + \zeta_{\tau,\rho}^d)^{\tau-t'} \cdot h_{\tau,\rho}^d(t') = 1.$$

Описание кредитов предприятия аналогично описанию депозитов. Список доступных для предприятия кредитов будем обозначать через C

Примем следующие обозначения, где все переменные будут относиться к кредиту вида $\rho \in C$:

- $H_{\tau,\rho}^c$ – размер заимствований предприятия в конце шага τ ,
- n_{ρ}^c – срок кредита,
- $\zeta_{\tau,\rho}^c$ – ставка кредита (фиксируется на весь срок заимствований).

В конце шага t на интервале от $\tau + 1$ до $\tau + n_{\rho}^c$ предприятие осуществляет возвраты денежных средств в размере $h_{\tau,\rho}^c(t) \cdot H_{\tau,\rho}^c$.

Задолженность по кредиту на начало шага t обозначается как $S_{\tau,\rho}^c(t)$. Динамика этой переменной задается следующим конечно-разностным уравнением:

$$S_{\tau,\rho}^c(t+1) = S_{\tau,\rho}^c(t) + g_{\tau,\rho}^c(t) - V_{\tau,\rho}^c(t), \quad t = \tau + 1, \dots, \tau + n_{\rho}^c$$

с начальным условием $S_{\tau, \rho}^c(\tau + 1) = H_{\tau, \rho}^c$.

Причем должно быть выполнено условие полного погашения кредита:

$$S_{\tau, \rho}^c(\tau + n_{\rho}^c + 1) = 0.$$

Здесь $g_{\tau, \rho}^c(t)$ – начисленные проценты по кредиту:

$$g_{\tau, \rho}^c(t) = \zeta_{\tau, \rho}^c \cdot S_{\tau, \rho}^c(t), \quad t = \tau + 1, \dots, \tau + n_{\rho}^c.$$

Платеж предприятия в конце шага t по кредиту вида ρ обозначается через $V_{\tau, \rho}^c(t)$ и записывается в виде:

$$V_{\tau, \rho}^c(t) = h_{\tau, \rho}^c(t) \cdot H_{\tau, \rho}^c, \quad t = \tau + 1, \dots, \tau + n_{\rho}^c.$$

С учетом введенных обозначений условие полного погашения кредита примет вид:

$$\sum_{t'=\tau+1}^{\tau+n_{\rho}^c} (1 + \zeta_{\tau, \rho}^c)^{\tau-t'} \cdot h_{\tau, \rho}^c(t') = 1.$$

5. Общее описание группы предприятий в векторной форме

В текущей постановке все производственные соотношения имеют линейный характер. Цены, по которым предприятие закупает во внешней среде входящие продукты и реализует произведенную продукцию относятся к неопределенным факторам и считаются заданными. Также будем считать, что стоимости продуктов, находящиеся в товарных запасах, и стоимости единиц производственных фондов предприятия относятся к неопределенным факторам. Это самые основные и, возможно, самые “грубые” допущения, которые мы сейчас принимаем, но они позволят нам предложить постановки простых задач уже для группы взаимодействующих предприятий.

Когда рассматривается одно предприятие k как управляемый объект, функционирующий во внешней среде, его состояние в начале шага t характеризуется вектором фазовых переменных $\vec{x}_k(t)$. Управление предприятия на шаге t обозначается через $\vec{u}_k(t)$. При заданных неопределенных факторах изменение вектора фазовых переменных описывается разностным уравнением

$$\vec{x}_k(t + 1) = \left\| \vec{F}_k^x(t) \right\| \cdot \vec{x}_k(t) + \left\| \vec{F}_k^u(t) \right\| \cdot \vec{u}_k(t), \quad t = 1, \dots, T \quad (13)$$

с заданным начальным условием $\vec{x}_k(1) = \vec{X}_k$.

При этом должны выполняться ограничения на управление

$$\|u_k(t)\| \cdot \bar{u}_k(t) \leq \bar{u}_k(t), t = 1, \dots, T \quad (14)$$

и ограничения смешанного типа

$$\|G_k^x(t)\| \cdot X_k(t) + \|G_k^n(t)\| \cdot \bar{u}_k(t) \leq 0, t = 1, \dots, T + 1 \quad (15)$$

При этом в его вектор управления входят количества входящих продуктов, которые предприятие получает из внешней среды, и количества произведенных продуктов, которые оно продает на внешний рынок.

Пусть предприятия объединяются в группу. Теперь для каждого предприятия мы разделим эти поставки на две составляющие. Первая будет по-прежнему характеризовать поставки продуктов из вне или во вне, в зависимости от того какие продукты мы рассматриваем, а вторая составляющая будут характеризовать поставки между другими предприятиями группы.

Система записи поставок в принятых переменных составит группу связующих ограничений.

Для каждого предприятия номера k определим $J_k^{p,+}$ множество индексов k' предприятий, которые поставляет продукты на предприятие k и $J_k^{p,-}$ множество индексов k' предприятий, в которые предприятие k поставляет продукты.

В этом случае переменные, характеризующие количество продуктов, поступающих на предприятие, состоят из суммы $x_k^{p,+}$, где $x_k^{p,+}$ характеризует поставки из внешнего мира, и суммы $\sum_{k' \in J_k^{p,+}} x_k^{p,+}$, что характеризует поставки от других предприятий $k' \in J_k^{p,+}$.

Точно так же переменные, характеризующие количество продуктов, уходящих с предприятия, состоит из суммы $x_k^{p,-}$ где $x_k^{p,-}$ характеризует поставки во внешний мир, и суммы $\sum_{k' \in J_k^{p,-}} x_k^{p,-}$, что характеризует

поставки на другие предприятия $k' \in J_k^{p,-}$.

Соответствующие изменения претерпят соотношения в финансовых уравнениях.

В целях упрощения мы не будем рассматривать переходы сотрудников с одного предприятия на другое. Считается, что каждое предприятие нанимает сотрудников из вне, а сотрудники покидающее на данном шаге предприятие (вследствие увольнения или каких-либо

других причин уже неконтролируемых управляющим органом предприятия) изменяют предложение внешнего рынка труда.

В случае децентрализованной системы это приведет к появлению дополнительных ограничений, часть из которых можно будет отнести к ограничениям на управление для одного предприятия вида (14) другие же образуют связующие ограничения группы. В терминах управления предприятий их можно представить в виде:

$$\sum_k \left\| \mathbb{B}_k^u \right\| \cdot \vec{u}_k(t) \leq \vec{\bar{u}}(t), t = 1, \dots, T \quad (16)$$

В случае централизованной системы величины поставок продуктов с одного предприятия на другое и поставки предприятия во вне мы будем относить к управлению центра. В то время как количество закупаемых предприятием продуктов во внешней среде оставим все же за выбором предприятия. Ограничения вида (16) по-прежнему останутся за счет предположения ограниченности ресурсов во внешней среде, но появятся ограничения, связывающие управление каждого предприятия и центра. Если обозначить управление центра через $\vec{v}(t)$, то их можно записать в виде:

$$\left\| \mathbb{C}_k^u \right\| \cdot \vec{u}_k(t) = \left\| \mathbb{C}_k^v \right\| \cdot \vec{v}(t), t = 1, \dots, T \quad (17)$$

Помимо неоговоренных здесь предположений, ограничивающих управление центра, некоторые из них, которые характеризуют технологическую сеть поставок или предположение фиксированности спроса со стороны внешней среды на продукты группы предприятий, приведут к ограничениям на управление центра следующего вида:

$$\left\| \mathbb{V} \right\| \cdot \vec{v}(t) \leq \vec{\bar{v}}(t), t = 1, \dots, T \quad (18)$$

6. Постановка задач управления

Одной из простейших задач управления предприятием может быть следующая.

Выберем в качестве управления переменные $\mathbf{x}_k^{p,+}(t)$, $\mathbf{y}_k^{p,p}(t)$, $\mathbf{y}_k^{p,o}(t)$, $\mathbf{x}_k^{p,-}(t)$, $\mathbf{u}_k^p(t)$, $\mathbf{u}_k^o(t)$, $H_k^c(t)$, $t = 1, \dots, T$ и рассмотрим задачу максимизации конечного капитала: $E_k(T+1) \rightarrow \max$, при условии неотрицательности управляющих и фазовых переменных $\mathbf{x}_k^p(t)$, $M_k(t)$, $t = 2, \dots, T+1$, а также с учетом ограничений по ресурсам для выпуска продукции и создания производственных фондов, которые описываются соответствующими линейными неравенствами.

Эта модель с соответствующим информационным и программным обеспечением и есть Цифровой двойник предприятия в рамках рассмотрения Цифровой платформы отрасли.

В этой записи возможны различные постановки оптимизационных (централизация) и теоретико-игровых задач (децентрализация).

Задача управления Центром группы предприятий изложена в работе авторов [12].

Рассматривая задачу поиска Парето-решения для группы предприятия, мы принимаем условие, что предприятия образуют коалицию и принимают общее решение, что рациональной стратегией для них является принять одно их Паретовских решений.

В таких условиях Центр, если он располагает соответствующей организационной властью, может принять в качестве собственного выбора некоторый набор коэффициентов свёртки функции выигрышей отдельных предприятий.

7. Формальная запись принятия решений группы предприятий в коалиции

Если записать решение оптимизационной задачи для одного предприятия в виде

$W_k(\bar{x}_k) \rightarrow \max$, где индивидуальные ограничения одного предприятия имеют вид $\bar{x}_k \in C_k$, $k \in K$, то критерий оптимальности для группы можно принять в виде

$$W_K(\bar{x}) = \sum_{k \in K} \omega_k \cdot W_k(\bar{x}_k), \quad \sum_{k \in K} \omega_k = 1$$

И общая оптимизационная задача коалиции запишется в виде

$$W_K(\bar{x}) \rightarrow \max, \quad \bar{x} \in B_K \text{ (связующие ограничения)}$$

В этой формализации предполагается, что если продукт потребляется, то он предлагается внешним миром или другими производителями. Или если продукт производится, то он потребляется другими предприятиями или внешним миром.

Список литературы

1. Иванюлов Ю.П. Математические модели в экономике. / Ю.П. Иванюлов, А.В. Лотов; – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 304 с.
2. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование. / А.В. Лотов; – М.: Наука, 1984. – 392 с
3. Иванов Ю.Н. Математическое описание элементов экономики. / Ю.Н. Иванов, В.В. Токарев, А.П. Уздемир; – М.: Наука, 1994. – 416 с

4. Иванов Ю.Н. Теоретическая экономика. Теория оптимального предприятия. / Ю.Н. Иванов, Р.А. Сотникова; – М.: ЛЕНАНД, 2012. – 224 с.
5. Первозванский А.А. Математические модели в управлении производством. / А.А. Первозванский – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1975. – 616 с.
6. Багриновский К.А. Модели и методы экономической кибернетики. / К.А. Багриновский, – М.: Экономика, 1973. – 206 с.
7. Багриновский К.А. Имитационные системы в планировании экономических объектов. / К.А. Багриновский; – М. Наука, 1980. – 237 с.
8. Багриновский К.А. Имитационное моделирование в задачах планирования и управления экономикой (сб. ст.) / К.А. Багриновский, В.С. Проколова; – М.: ЦЭМИ, 1990. – 220 с.
9. Клейнер Г.Б. Стратегия предприятия. / Г.Б. Клейнер – М.: Дело, 2008. – 568 с.
10. Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение. / Г.Б. Клейнер. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 240 с.
11. Довгучиц С.И. Математическое моделирование в решении задач информационно-аналитического обеспечения управления развитием оборонно-промышленного комплекса / С.И. Довгучиц, А.Ю. Мушков, Ф.И. Ерешко // Научн. вестн. оборонно-промышленного комплекса России. – 2021. – № 1. – С. 5–15.
12. Sytov A., "Enterprise Digital Twin Research," / A. Sytov, A. Vakhramev and F. Ereshko; // 2021 14th International Conference Management of large-scale system development (MLSD), 2021, pp. 1-5, doi: 10.1109/MLSD52249.2021.9600158.